Was ist eigentlich . . . das Kontinuum? Und was ist sein Problem?

oder: Was ist eigentlich . . . Forcing? Und wie kann man es überwinden?

Gido Scharfenberger-Fabian

4. Juli 2008

Outline

Outline

Cantors Kontinuumshypothese (1878) — CH

Jede unendliche Menge reeller Zahlen ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit der Menge aller reeller Zahlen.

Cantors Kontinuumshypothese (1878) — CH

Jede unendliche Menge reeller Zahlen ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit der Menge aller reeller Zahlen.

$$X \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow X \text{ endlich oder } |X| = |\mathbb{N}| \text{ oder } |X| = |\mathbb{R}|$$

Cantors Kontinuumshypothese (1878) — CH

Jede unendliche Menge reeller Zahlen ist entweder abzählbar oder von der Mächtigkeit der Menge aller reeller Zahlen.

$$X \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow X \text{ endlich oder } |X| = |\mathbb{N}| \text{ oder } |X| = |\mathbb{R}|$$

Philosophische Frage (für später)

Muss eine Aussage wie CH überhaupt einen Wahrheitswert haben?

Gödel (1937)

Die Kontinuumshypothese wird von ZFC nicht widerlegt.

Gödel (1937)

Die Kontinuumshypothese wird von ZFC nicht widerlegt.

Jedes ZFC-Modell V (d.i. eine Struktur, die alle ZFC-Axiome erfüllt, ein *Mengenuniversum*) hat ein Submodell L, das auch ZFC und außerdem CH erfüllt.

Gödel (1937)

Die Kontinuumshypothese wird von ZFC nicht widerlegt.

Jedes ZFC-Modell V (d.i. eine Struktur, die alle ZFC-Axiome erfüllt, ein *Mengenuniversum*) hat ein Submodell L, das auch ZFC und außerdem CH erfüllt.

$$(V, \in) \models \text{ZFC} \Rightarrow \text{ ex. } L \subseteq V : (L, \in) \models \text{ZFC} + \text{CH}$$

Cohen (1963)

Die Kontinuumshypothese kann aus ZFC nicht bewiesen werden.

Cohen (1963)

Die Kontinuumshypothese kann aus ZFC nicht bewiesen werden.

Grob gesagt: Jedes ZFC-Modell V hat eine (Forcing)-Erweiterung $V[G]$, die auch ZFC-Modell ist und in der CH falsch ist.

Cohen (1963)

Die Kontinuumshypothese kann aus ZFC nicht bewiesen werden.

Grob gesagt: Jedes ZFC-Modell V hat eine (Forcing)-Erweiterung $V[G]$, die auch ZFC-Modell ist und in der CH falsch ist.

$$V \models \mathrm{ZFC} \Rightarrow \text{ ex. } V[G] \supset V : (V[G], \in) \models \mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$$

Cohen (1963)

Die Kontinuumshypothese kann aus ZFC nicht bewiesen werden.

Grob gesagt: Jedes ZFC-Modell V hat eine (Forcing)-Erweiterung $V[G]$, die auch ZFC-Modell ist und in der CH falsch ist.

$$V \models \mathrm{ZFC} \Rightarrow \text{ ex. } V[G] \supset V : (V[G], \in) \models \mathrm{ZFC} + \neg\mathrm{CH}$$

Auf die Forcing-Methode wollen wir später etwas genauer eingehen.

Outline

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \varnothing$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\ldots$$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\ldots$$
$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$$
$$\ldots$$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\dots$$
$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\}$$
$$\dots$$

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$$0 = \varnothing$$
$$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$$
$$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$$
$$\ldots$$
$$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$$
$$\ldots$$

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)

$$\omega{+}1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, \ldots, \omega\}$$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
...
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\}$
...

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega{\cup}\{\omega\} = \{0, 1, \dots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
...

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \emptyset$
$1 = \{0\} = \{\emptyset\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\ldots$
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$
$\ldots$

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega{\cup}\{\omega\} = \{0, 1, \ldots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
$\ldots$
$\alpha{+}1 = \alpha{\cup}\{\alpha\} = \{0, 1, \ldots, \alpha\}$
$\ldots$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$\dots$
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\}$
$\dots$

- Nachfolger $\alpha = \gamma + 1$

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, \dots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
$\dots$
$\alpha{+}1 = \alpha \cup \{\alpha\} = \{0, 1, \dots, \alpha\}$
$\dots$

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
$\dots$
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\}$
$\dots$

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega\cup\{\omega\} = \{0, 1, \dots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
$\dots$
$\alpha{+}1 = \alpha\cup\{\alpha\} = \{0, 1, \dots, \alpha\}$
$\dots$

- Nachfolger $\alpha = \gamma + 1$
- Limes $0 \neq \alpha \neq \gamma + 1$ f.a. $\gamma < \alpha$.

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
...
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \dots, n\}$
...

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega{\cup}\{\omega\} = \{0, 1, \dots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
...
$\alpha{+}1 = \alpha{\cup}\{\alpha\} = \{0, 1, \dots, \alpha\}$
...

- Nachfolger $\alpha = \gamma + 1$
- Limes $0 \neq \alpha \neq \gamma + 1$ f.a. $\gamma < \alpha$.

Transfinite Iterationen – Ordinalzahlen

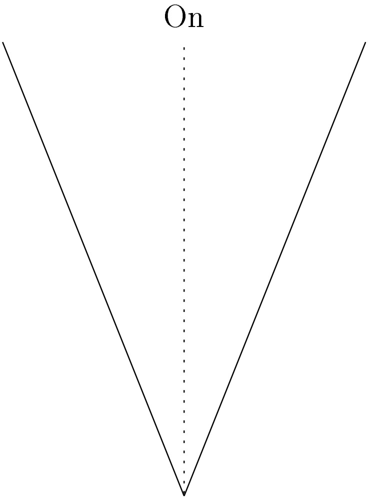
$0 = \varnothing$
$1 = \{0\} = \{\varnothing\}$
$2 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
...
$n + 1 = n \cup \{n\} = \{0, \ldots, n\}$
...

$\omega := \mathbb{N}$ (erster *Limes*)
$\omega{+}1 = \omega \cup \{\omega\} = \{0, 1, \ldots, \omega\}$
$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$
...
$\alpha{+}1 = \alpha \cup \{\alpha\} = \{0, 1, \ldots, \alpha\}$
...

- Nachfolger $\alpha = \gamma + 1$
- Limes $0 \neq \alpha \neq \gamma + 1$ f.a. $\gamma < \alpha$.

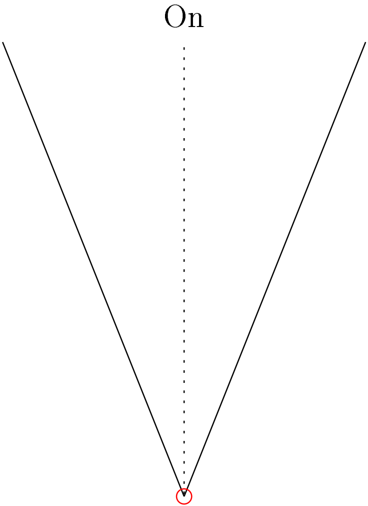
$$\mathrm{On} = \{x \mid (x, \in) \text{ ist lin.Ordnung und } y \in x \to y \subset x\}$$

Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

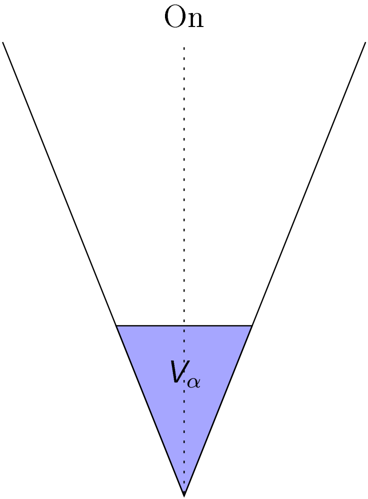
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_0 = \varnothing$

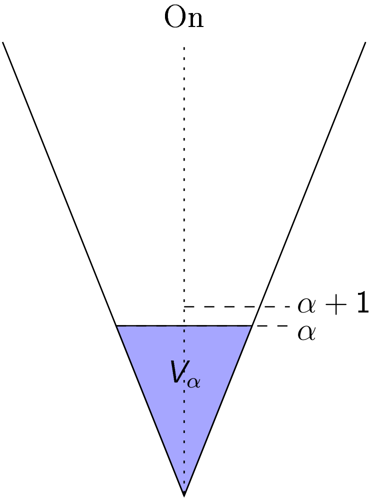
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

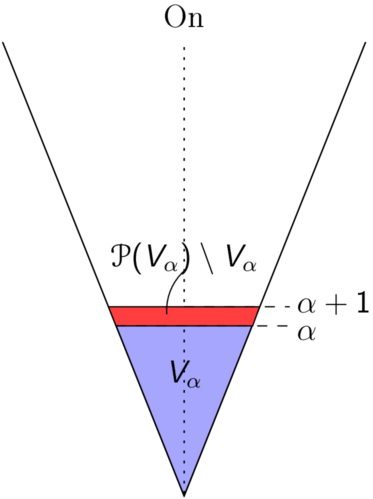
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

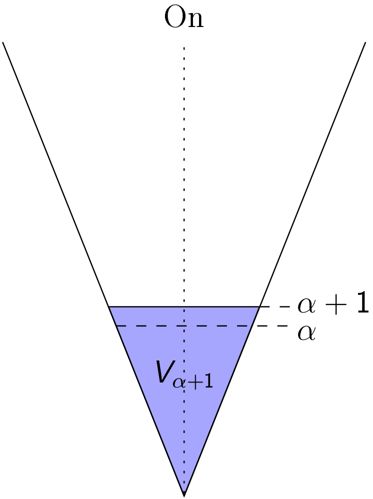
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

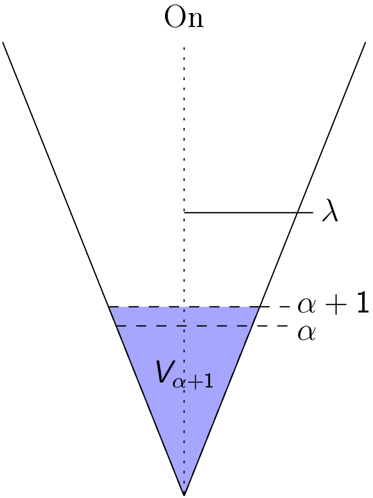
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$

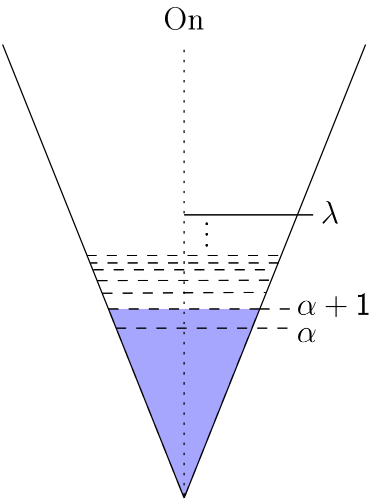
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

λ Limes-Ordinalzahl

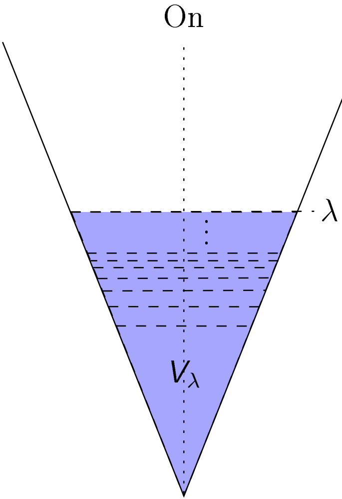
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

λ Limes-Ordinalzahl

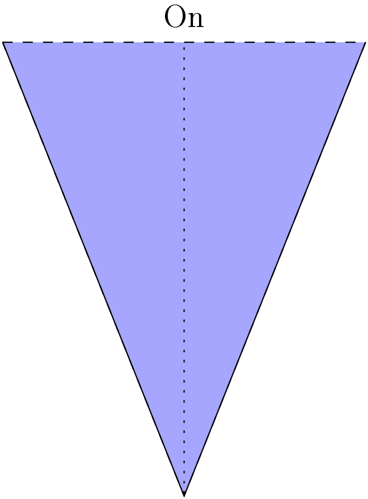
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$

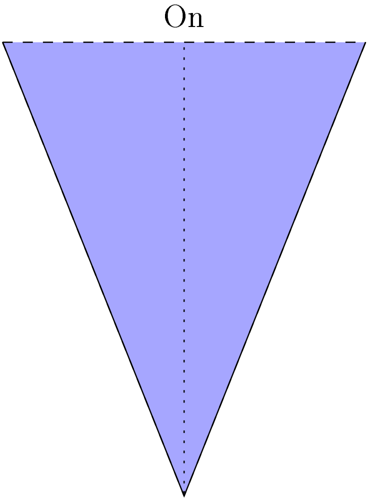
Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$

Das mengentheoretische Universum V



Iteration von Potenzmenge und Vereinigung:

- $V = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha$
- $V_\lambda = \bigcup_{\alpha < \lambda} V_\alpha$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_0 = \varnothing$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}.$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}.$

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich }\}$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}.$

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich }\}$
- $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}.$

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich }\}$
- $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$
- $\aleph_{\beta+1} = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_\beta\}$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}$.

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich }\}$
- $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$
- $\aleph_{\beta+1} = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_\beta\}$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}.$

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich }\}$
- $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$
- $\aleph_{\beta+1} = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_\beta\}$

CH: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

Kardinalzahlen

Bekannt: Kardinalitätsbegriff

- $|X| = |Y| :\iff$ ex. $f : X \to Y$ bijektiv
- Schröder-Bernstein: $X \hookrightarrow Y$ und $Y \hookrightarrow X \Rightarrow |X| = |Y|$

Kardinalzahlen: $|X| = \min\{\alpha \in \mathrm{On} \mid \text{ex. } f : X \leftrightarrow \alpha\} \in \mathrm{On}$.

- $\aleph_0 = \omega = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid \alpha \text{ endlich}\}$
- $\aleph_1 = \omega_1 = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_0\}$
- $\aleph_{\beta+1} = \{\alpha \in \mathrm{On} \mid |\alpha| \leq \aleph_\beta\}$

CH: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, denn $2^{\aleph_0} = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Outline

Forcing-Idee

Zu $V \models \mathrm{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

Forcing-Idee

Zu $V \models \mathrm{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

- eine große Menge G reeller Zahlen ($|G| > \aleph_1$)

Forcing-Idee

Zu $V \vDash \mathrm{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

- eine große Menge G reeller Zahlen ($|G| > \aleph_1$)
- oder eine Surjektion $G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$.

Forcing-Idee

Zu $V \models \mathrm{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

- eine große Menge G reeller Zahlen ($|G| > \aleph_1$)
- oder eine Surjektion $G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$.

Forcing-Idee

Zu $V \models \text{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

- eine große Menge G reeller Zahlen ($|G| > \aleph_1$)
- oder eine Surjektion $G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$.

Neues ZFC-Modell $V[G] \supset V \cup \{G\}$.

Forcing-Idee

Zu $V \models \mathrm{ZFC}$ soll ein neues Objekt G adjungiert werden, z.B.

- eine große Menge G reeller Zahlen $(|G| > \aleph_1)$
- oder eine Surjektion $G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$.

Neues ZFC-Modell $V[G] \supset V \cup \{G\}$.

Die Eigenschaften von $V[G]$ sind von V aus kontrollierbar.

Forcing-Technik, die Halbordnung

- In V wird eine Halbordnung $(\mathbb{P}, <)$ von Approximationen an das gewünschte Objekt definiert.

Forcing-Technik, die Halbordnung

- In V wird eine Halbordnung $(\mathbb{P}, <)$ von Approximationen an das gewünschte Objekt definiert.
- Die Elemente $p \in \mathbb{P}$ heißen *Forcing-Bedingungen*

Forcing-Technik, die Halbordnung

- In V wird eine Halbordnung $(\mathbb{P}, <)$ von Approximationen an das gewünschte Objekt definiert.
- Die Elemente $p \in \mathbb{P}$ heißen *Forcing-Bedingungen*
- $p < q$ heißt „p erweitert q“, p hat mehr Information.

Forcing-Technik, die Halbordnung

- In V wird eine Halbordnung $(\mathbb{P}, <)$ von Approximationen an das gewünschte Objekt definiert.
- Die Elemente $p \in \mathbb{P}$ heißen *Forcing-Bedingungen*
- $p < q$ heißt „p erweitert q“, p hat mehr Information.
- p, q *kompatibel*, falls ex. $r \leq p, q$

Forcing-Technik, der generische Filter

- Außerhalb von V wird dann eine *generische* Teilmenge G von $\mathbb{P}$ gefunden.

Forcing-Technik, der generische Filter

- Außerhalb von V wird dann eine *generische* Teilmenge G von $\mathbb{P}$ gefunden.
- G generisch $:\iff$ G schneidet jede in $\mathbb{P}$ dichte Teilmenge $D \in V$ + Verträglichkeitsbedingungen.

Forcing-Technik, der generische Filter

- Außerhalb von V wird dann eine *generische* Teilmenge G von $\mathbb{P}$ gefunden.
- G generisch $:\iff$ G schneidet jede in $\mathbb{P}$ dichte Teilmenge $D \in V$ + Verträglichkeitsbedingungen.
- Topologie von $\mathbb{P}$ wird von $U_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q < p\}$, $p \in \mathbb{P}$ erzeugt.

Forcing-Technik, der generische Filter

- Außerhalb von V wird dann eine *generische* Teilmenge G von $\mathbb{P}$ gefunden.
- G generisch $:\iff$ G schneidet jede in $\mathbb{P}$ dichte Teilmenge $D \in V$ + Verträglichkeitsbedingungen.
- Topologie von $\mathbb{P}$ wird von $U_p = \{q \in \mathbb{P} \mid q < p\}$, $p \in \mathbb{P}$ erzeugt.
- Existenz von G: Nimm z.B. an, dass V abzählbar ist.

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$:
  $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$:
  $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$
- Jede Auswahl von G weist jedem $\mathbb{P}$-Namen $\dot{x}$ einen Wert (eine Menge) zu: $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid (\exists\, p \in G)(p, \dot{y}) \in \dot{x}\}$.

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$:
  $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$
- Jede Auswahl von G weist jedem $\mathbb{P}$-Namen $\dot{x}$ einen Wert (eine Menge) zu: $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid (\exists\, p \in G)(p, \dot{y}) \in \dot{x}\}$.
- $V[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\}$ (ZFC-Modell).

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$:
  $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$
- Jede Auswahl von G weist jedem $\mathbb{P}$-Namen $\dot{x}$ einen Wert (eine Menge) zu: $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid (\exists\, p \in G)(p, \dot{y}) \in \dot{x}\}$.
- $V[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\}$ (ZFC-Modell).
- Beispiele:

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$:
  $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$
- Jede Auswahl von G weist jedem $\mathbb{P}$-Namen $\dot{x}$ einen Wert (eine Menge) zu: $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid (\exists p \in G)(p, \dot{y}) \in \dot{x}\}$.
- $V[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\}$ (ZFC-Modell).
- Beispiele:
  - $\check{x} := \{(p, y) \mid p \in \mathbb{P},\ y \in x\}$, kanonischer Name für $x \in V \subseteq V[G]$.

Forcing-Technik, die generische Erweiterung $V[G]$

- Namen $\dot{x} \in V$ für die Elemente von $V[G]$: $\dot{x} = \{(p, \dot{y}), (q, \dot{z}), \ldots\}$
- Jede Auswahl von G weist jedem $\mathbb{P}$-Namen $\dot{x}$ einen Wert (eine Menge) zu: $\dot{x}^G = \{\dot{y}^G \mid (\exists\, p \in G)(p, \dot{y}) \in \dot{x}\}$.
- $V[G] = \{\dot{x}_G : \dot{x} \in V^{\mathbb{P}}\}$ (ZFC-Modell).
- Beispiele:
  - $\check{x} := \{(p, y) \mid p \in \mathbb{P},\ y \in x\}$, kanonischer Name für $x \in V \subseteq V[G]$.
  - $\dot{G} := \{(p, \check{p}) \mid p \in \mathbb{P}\}$, kanonischer Name für $G \in V[G]$.

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

$$\mathbb{P} := \{p : \mathrm{dom}(p) \to \{0,1\} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_2 \times \omega,\ \mathrm{dom}(p) \text{ endlich}\}$$

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

$$\mathbb{P} := \{p : \mathrm{dom}(p) \to \{0, 1\} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_2 \times \omega, \ \mathrm{dom}(p) \text{ endlich}\}$$

$$p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$$

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

$$\mathbb{P} := \{p : \mathrm{dom}(p) \to \{0,1\} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_2 \times \omega,\ \mathrm{dom}(p) \text{ endlich}\}$$

$$p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$$

Ist $G \subset \mathbb{P}$ generisch, so „ist“ $f = \cup G$ eine Injektion $f : \aleph_2 \to [0,1]$.

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

$$\mathbb{P} := \{p : \mathrm{dom}(p) \to \{0,1\} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_2 \times \omega, \, \mathrm{dom}(p) \text{ endlich}\}$$

$$p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$$

Ist $G \subset \mathbb{P}$ generisch, so „ist“ $f = \cup G$ eine Injektion $f : \aleph_2 \to [0,1]$.

Problematisch: $\aleph_2$ könnte kollabieren, also in $V[G]$ nicht mehr die dritte unendliche Kardinalzahl sein.

Forcing für $\neg$CH

Wir wollen eine injektive Abbildung $f : \aleph_2 \to \mathbb{R}$ adjungieren.

Approximation durch endliche partielle Funktionen:

$$\mathbb{P} := \{p : \mathrm{dom}(p) \to \{0,1\} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_2 \times \omega,\ \mathrm{dom}(p) \text{ endlich}\}$$

$$p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$$

Ist $G \subset \mathbb{P}$ generisch, so „ist“ $f = \cup G$ eine Injektion $f : \aleph_2 \to [0,1]$.

Problematisch: $\aleph_2$ könnte kollabieren, also in $V[G]$ nicht mehr die dritte unendliche Kardinalzahl sein.

Lösung: kombinatorische Analyse von $\mathbb{P}$!

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Approximation durch abzählbare partielle Bijektionen

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Approximation durch abzählbare partielle Bijektionen

$$\mathbb{Q} = \{p : \mathrm{dom}(p) \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_1,\ |\mathrm{dom}(p)| = \aleph_0,\ p \text{ bijektiv}\}$$

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Approximation durch abzählbare partielle Bijektionen

$$\mathbb{Q} = \{p : \mathrm{dom}(p) \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_1, \, |\mathrm{dom}(p)| = \aleph_0, \, p \text{ bijektiv}\}$$

$$\text{und wieder: } p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$$

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Approximation durch abzählbare partielle Bijektionen

$$\mathbb{Q} = \{p : \mathrm{dom}(p) \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_1,\ |\mathrm{dom}(p)| = \aleph_0,\ p \text{ bijektiv}\}$$

und wieder: $p < q \quad :\Longleftrightarrow \quad p \supset q.$

Und wieder ist $f := \bigcup G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$ die gesuchte Abbildung.

Forcing für CH

Generisches Objekt: Bijektion $f : \aleph_1 \leftrightarrow \mathbb{R}$

Approximation durch abzählbare partielle Bijektionen

$$\mathbb{Q} = \{p : \mathrm{dom}(p) \to \mathbb{R} \mid \mathrm{dom}(p) \subset \aleph_1, \, |\mathrm{dom}(p)| = \aleph_0, \, p \text{ bijektiv}\}$$

$$\text{und wieder: } p < q \quad :\iff \quad p \supset q.$$

Und wieder ist $f := \bigcup G : \aleph_1 \to \mathbb{R}$ die gesuchte Abbildung.

Problem: Gibt es in $V[G]$ neue reelle Zahlen?

Outline

Wo in V wird CH entschieden?

$H_\kappa :=$ { Mengen von erblicher Mächtigkeit $< \kappa$}

Wo in V wird CH entschieden?

$H_\kappa :=$ { Mengen von erblicher Mächtigkeit $< \kappa$}

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in H_{\aleph_2}$$

Wo in V wird CH entschieden?

$H_\kappa :=$ { Mengen von erblicher Mächtigkeit $< \kappa$}

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in H_{\aleph_2}$$

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow H_{\aleph_2} \models (\exists X)(\forall x \subseteq \mathbb{N}) x \in X$$

Wo in V wird CH entschieden?

$H_\kappa :=$ { Mengen von erblicher Mächtigkeit $< \kappa$}

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in H_{\aleph_2}$$

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow H_{\aleph_2} \vDash (\exists X)(\forall x \subseteq \mathbb{N}) x \in X$$

Das Axiom $(*)$ macht die Eigenschaften von $H_{\aleph_2}$ in Ω-Logik immun gegen Forcing

Wo in V wird CH entschieden?

$H_\kappa :=$ { Mengen von erblicher Mächtigkeit $< \kappa$}

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}) \in H_{\aleph_2}$$

$$\mathrm{CH} \Leftrightarrow H_{\aleph_2} \models (\exists X)(\forall x \subseteq \mathbb{N}) x \in X$$

Das Axiom $(*)$ macht die Eigenschaften von $H_{\aleph_2}$ in Ω-Logik immun gegen Forcing
und impliziert $\neg$CH.